

三层成层水域内波的研究

章守宇 杨红

(上海水产大学工程技术学院, 200090)

摘 要 运用小振幅波理论对三层成层水域的内波运动进行了解析,阐明了三层成层状态下的流速垂直分布和内波波动分散规律,并与大阪湾观测到的内波实例取得良好吻合。解析还表明,三层成层水域流速的大小与内波引起各层间的流量分配密切相关,最大振幅水深由水域的成层特点所决定,小波速时的内波界面变位和流况与二层成层的情形呈现完全相反的结果。了解三层成层水域内波的这些特性对于正确认识养殖水域的环境特点及变动,合理设置水产增殖设施等具有积极意义。

关键词 小振幅波理论,内波,三层成层水域

中图分类号 O353.2

大洋、沿岸及湖泊水域,由于太阳的持续高温辐射、大陆径流水的流入以及结冰的溶化等,都会使水体在垂直方向上的密度产生成层。密度成层状态下的流体在外力作用下如潮汐、风吹等,其内部会发生波浪运动现象即所谓内波。内波发生时,虽然有时水表面仅呈微弱的波动,但在流体内部却会产生几倍甚至10几倍于表面波振幅的剧烈运动,因此,内波的发生对于鱼类洄游、上升流生成、底泥运动及能量输送等都产生重要影响,在海洋渔业生产及环境改善方面起着不可忽视的作用。

内波的许多特性与表面波相类似,但由于其在理论或实验中,处理起来都较表面波复杂,因此尚没有象表面波那样较为系统完善并使之定量化的研究。通常的做法是把密度连续成层的水域在跃层处一分为二,视为上下两个密度均一的水体,以界面长波来进行处理[中村充1991],给研究内波带来很大方便。但在实际海洋内部,这种极端的密度二层成层并非成层现象的全部,例如在中纬度海区的对流层下方水深约500米附近,通常就存在着所谓永久性温跃层,在春夏季的成层期很容易与对流层以内的季节性成层构成三层成层;另外,水深较浅的沿岸养殖水域如内湾在成层期,内波产生的海水混合弱化了密度的成层,同时潮汐通过湾口不断与湾内水进行交换,使得湾内水的密度垂直分布变得非常复杂,因此,应用二层界面波的方法是难以解析的。本文就密度三层成层状态下的内部波动规律,以小振幅波理论为基础进行解析,并结合现场海域的密度成层情况作一实例分析。

1 理论方法

如图1所示,设水深 H 为一定、密度呈三层成层的流体,流体为非粘性不可压缩,波动形式为小振幅波,并忽略地球回转影响。坐标系取静止水面向右为 x 轴正方向,垂直向上为 z 轴正方向。成层流体的密度自水面而下分别为 ρ_1, ρ_2, ρ_3 , 厚度为 h_1, h_2, h_3 。不同流体密度之间构成的各界面水深坐标分别为 z_0, z_1, z_2, z_3, z_0 表示水面, z_3 表示海底。假定内部波动是从静止状态发生的,故可视作无旋运动并存在速度势 ϕ , 设水粒子在 x, z 方向的运动速度分别为 u, w , 则

$$u = -\frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad w = -\frac{\partial \phi}{\partial z} \quad (1)$$

对于 i 层流体, 有连续方程

$$\frac{\partial u_i}{\partial x} + \frac{\partial w_i}{\partial z} = 0 \quad (i = 1, 2, 3) \quad (2)$$

式(1)代入式(2)

$$\frac{\partial^2 \phi_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial z^2} = 0 \quad (3)$$

式(3)即为流体连续方程的 Laplace 表达式。一般地, 势函数 ϕ_i 取下列形式

$$\phi_i = Z_i(z) \cos(kx - \sigma t) \quad (4)$$

式中, σ 为内部波动的角频率, k 为波数, t 为时间。式(4)代入式(3)得

$$\frac{\partial^2 Z_i(z)}{\partial z^2} - k^2 Z_i(z) = 0 \quad (5)$$

式(5)的一般解形式为

$$Z_i(z) = C_{i1} e^{kz} + C_{i2} e^{-kz} \quad (6)$$

式中 C_{i1}, C_{i2} 为常数。

压力为小幅变动时, 由流体压力方程式得到

$$\left. \begin{aligned} p_1 &= \rho_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial t} - \rho_1 g z & (z_0 \leq z \leq z_1) \\ p_2 &= \rho_2 \frac{\partial \phi_2}{\partial t} - \rho_2 g(z - z_1) + \rho_1 g h_1 & (z_1 \leq z \leq z_2) \\ p_3 &= \rho_3 \frac{\partial \phi_3}{\partial t} - \rho_3 g(z - z_2) + \rho_1 g h_1 + \rho_2 g h_2 & (z_2 \leq z \leq z_3) \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

这里 p_1, p_2, p_3 代表各层流体的动压力, g 为重力加速度。假设 η_1, η_2 分别为界面 1, 2 处的波动变位, 显然对于界面 1, 2 有

$$p_1|_{z=z_1+\eta_1} = p_2|_{z=z_1+\eta_1}, \quad p_2|_{z=z_2+\eta_2} = p_3|_{z=z_2+\eta_2} \quad (8)$$

考虑到小振幅波特点, $sh(h_i + \eta_i) \rightarrow shkh_i$, 且 $\rho_1/\rho_2 \approx 1, \rho_2/\rho_3 \approx 1$, 并令 $\epsilon_1 = (\rho_2 - \rho_1)/\rho_2, \epsilon_2 = (\rho_3 - \rho_2)/\rho_3$, 由式(7)、(8)可得到

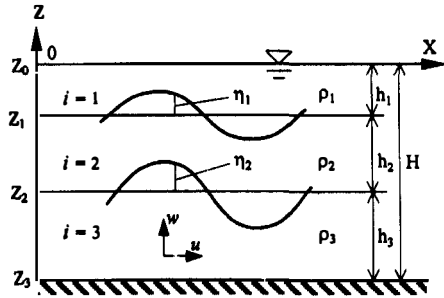


图1 三层成层水域的结构及内波示意图
Fig. 1 Schematic view of three-layer stratified fluid and internal wave

$$\left. \begin{aligned} \eta_1 &= A_1 \sin(kx - \sigma t) \\ \eta_2 &= A_2 \sin(kx - \sigma t) \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

即,成层流体内部的界面变位依照正弦规律波动。式中 A_1 、 A_2 为振幅大小,用下式给出

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= \frac{\sigma}{\epsilon_1 g} [(C_{21} - C_{11})e^{kz_1} + (C_{22} - C_{12})e^{-kz_1}] \\ A_2 &= \frac{\sigma}{\epsilon_2 g} [(C_{31} - C_{21})e^{kz_2} + (C_{32} - C_{22})e^{-kz_2}] \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

另外,满足式(3)的动力条件为

$$\frac{\partial \eta_1}{\partial t} = - \frac{\partial \phi_1}{\partial z} \Big|_{z=z_1+\eta_1}, \quad \frac{\partial \eta_2}{\partial t} = - \frac{\partial \phi_2}{\partial z} \Big|_{z=z_2+\eta_2} \quad (11)$$

根据水粒子在海底的垂直速度为零,并基于水面小振幅波理论,则满足式(3)的边界条件应为

$$- \frac{\partial \phi_3}{\partial z} \Big|_{z=z_3} = 0, \quad - \frac{\partial \phi_1}{\partial z} \Big|_{z=0} \approx 0 \quad (12)$$

由式(3)~式(11)解各常数 C_{11} 、 C_{12} 、 C_{21} 、 C_{22} 、 C_{31} 、 C_{32} ,得到密度三层成层状态时的速度势函数为

$$\left. \begin{aligned} \phi_1 &= - \frac{\sigma}{k} \frac{A_1 chkh_2}{shkh_1} \cos(kx - \sigma t) & (z_0 \leq z \leq z_1) \\ \phi_2 &= \frac{\sigma}{k} \frac{A_1 chkh(z - z_2) - A_2 chkh(z_1 - z)}{shkh_2} \cos(kx - \sigma t) & (z_1 \leq z \leq z_2) \\ \phi_3 &= \frac{\sigma}{k} \frac{A_2 chkh(z - z_3)}{shkh} \cos(kx - \sigma t) & (z_2 \leq z \leq z_3) \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

关于界面振幅的二元方程组由各常数 C_{11} 、 C_{12} 、 C_{21} 、 C_{22} 、 C_{31} 、 C_{32} 代入式(10),并考虑 $shkh_i \rightarrow kh_i$ 整理得到

$$\left. \begin{aligned} A_1 \left(\frac{\epsilon_1 g h_2}{c^2} - \frac{h_1 + h_2}{h_1} \right) + A_2 &= 0 \\ A_1 + A_2 \left(\frac{\epsilon_2 g h_2}{c^2} - \frac{h_2 + h_3}{h_3} \right) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

这里的 $c = \sigma/k$ 为波速,由式(12)消去 A_1 、 A_2

$$\left(\frac{\epsilon_1 g h_2}{c^2} - \frac{h_1 + h_2}{h_1} \right) \left(\frac{\epsilon_2 g h_2}{c^2} - \frac{h_2 + h_3}{h_3} \right) - 1 = 0 \quad (15)$$

上式即为密度三层成层时的波动分散式。因此,满足式(15)的波速有二个解 c' 、 c'' ,即三层成层内波的传播方式有二种,令 c' 大于 c'' ,则可以称 c' 为大波速方式, c'' 为小波速方式。设界面振幅 A_1 和 A_2 之间存在关系

$$A_2/A_1 = \beta \quad (16)$$

β 称为内波振幅比,式(16)代入式(14)并消去 c 用 β 整理得到以下关系

$$\beta^2 + \left[\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} - 1 + \left(\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \frac{h_2}{h_3} - \frac{h_2}{h_1} \right) \right] \beta - \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} = 0 \quad (17)$$

同样,根据(17)式可以得到两个振幅比解 β' 、 β'' 分别与 c' 、 c'' 相对应。对式(17)进一步因式分解,下式成立

$$\left(\beta + \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \right) (\beta - 1) = \left(\frac{h_2}{h_1} - \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \frac{h_2}{h_3} \right) \beta \quad (18)$$

视上式左右两边分别为变量 β 的函数,从几何特点可以证明其二解 β', β''

$$\left. \begin{aligned} & \frac{h_3}{h_1} \geq \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \quad \beta' \geq 1, -\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \leq \beta'' < 0 \\ \text{当} \quad & \quad \quad \quad \text{时,} \\ & \frac{h_3}{h_1} < \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \quad 0 < \beta' < 1, \beta'' < -\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

即,与大波速 c' 传播方式对应的内波振幅比 β' 总是呈现正数,而与小波速 c'' 传播方式相对应的内波振幅比 β'' 则恒显负数。因此,密度三层成层时流体各层的平均水平流速可由下式给出,

$$\left. \begin{aligned} \bar{u}_1 &= \frac{1}{h_1} \int_{x_1}^{x_0} -\frac{\partial \phi_1}{\partial x} dz = -c \frac{1}{h_1} A_1 \sin(kx - \sigma t) \\ \bar{u}_2 &= \frac{1}{h_2} \int_{x_2}^{x_1} -\frac{\partial \phi_2}{\partial x} dz = c \frac{1 - \beta}{h_2} A_1 \sin(kx - \sigma t) \\ \bar{u}_3 &= \frac{1}{h_3} \int_{x_3}^{x_2} -\frac{\partial \phi_3}{\partial x} dz = c \frac{\beta}{h_3} A_1 \sin(kx - \sigma t) \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

式(20)描述的界面波形与流速的关系如图2所示,当内波以大波速 c' 传播时,界面1,2的振动波形呈同相位,但上下层水粒子运动方向相反;而当内波以小波速 c'' 传播时,两界面波形则呈逆相位,但上下层水粒子运动方向为同向。即大波速时的界面变位和流况类似于密度二层成层流体情形,而小波速时的界面变位和流况则与二层成层流体情形呈现完全相反的结果。流速的大小与内部波动引起各层间的流量分配密切相关。另外,由式(17)~式(19)可知,三层成层时内波的最大振幅水深由水域的各成层厚度及它们之间的密度差比例所决定。内波的这些特性对于渔业水域环境的改善具有积极作用,比如春夏季由于海面加热产生的海水密度成层,使得表层溶解氧丰富的水不能被输送到下层,从而引起底层水贫氧化,对养殖种类造成危害,而内波的发生可以通过其在密度界面处流速方向相反所产生的强烈剪切流来促进海水的上下混合,弱化成层,从而改善水域环境。另一方面,比如在增养殖设施特别是水下式网箱的设置等方面,考虑水域的成层特点,有利于合理选择设置地点和水深,避免因内波可能产生的大振幅运动对设施带来的损失。

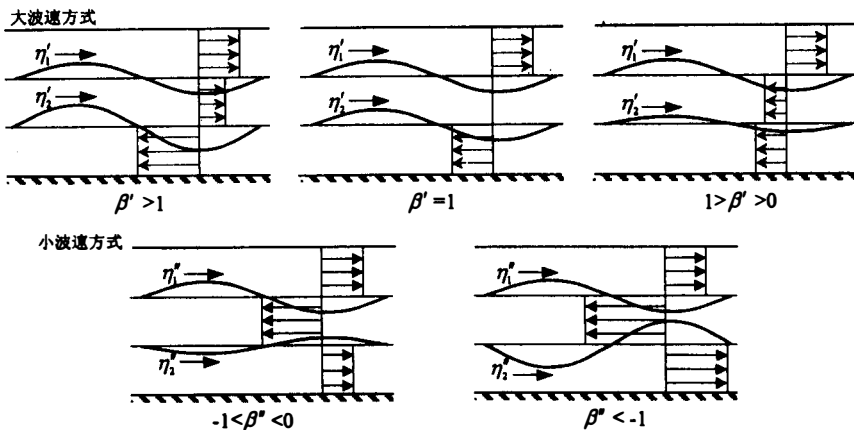


图2 三层成层水域的内波形及流况

Fig. 2 Phase of interfacial wave and its flow characters inside of three-layer stratified fluid

2 实例讨论

图3、图4是1991年6月30日在日本大阪湾观测到的短周期内波及水温、盐度、密度的垂直分布情况[Yanagi 等 1993],从图中可看出水温、盐度及密度的垂直分布呈明显的三层成层状态。当时现场观测到的内波实际波速约为22.2cm/s, Yanagi 等[1993]以二层成层划分水域,取 $h_1 = 7\text{m}$ 、 $h_2 = 13\text{m}$ 、 $\rho_1 = 1.0205$ 、 $\rho_2 = 1.0225$, 结果计算得到波速 c 为29.5cm/s。若按本研究的三层成层划分水域,如图取 $h_1 = 2.5\text{m}$ 、 $h_2 = 2.5\text{m}$ 、 $h_3 = 15.0\text{m}$ 、 $\rho_1 = 1.0196$ 、 $\rho_2 = 1.0205$ 、 $\rho_3 = 1.0220$, 那么由式(15)计算得到的二个波速之一 c' (即大波速) 则为25.2cm/s, 较二层成层的处理接近于实际波速。另外,根据以上密度三层成层的划分,可以得到 $h_3/h_1 = 6.0$, $\epsilon_1/\epsilon_2 = \rho_3(\rho_2 - \rho_1)/\rho_2(\rho_3 - \rho_2) = 0.6$, $h_3/h_1 \epsilon_1/\epsilon_2$, 且由式(17)解得 $\beta = 1.66$, 满足式(19)的条件关系。另一方面,从图3可以读得的两界面振幅 A_1, A_2 约分别为1.8m/2和3.0m/2, 其振幅比约为1.67, 十分接近于理论值的1.66。需要指出的是,无论是应用二层还是三层成层的内波理论分析本例时,计算所得到的内波波速与实际观测所得到的都存在一定的差异,相对误差率分别达到32.9%和13.5%, 其原因是由于本例的实际水深较浅,界面振幅与各成层厚度之比例略大,稍微偏离了波高与水深相比充分小这一小振幅波的基本条件而引起的。

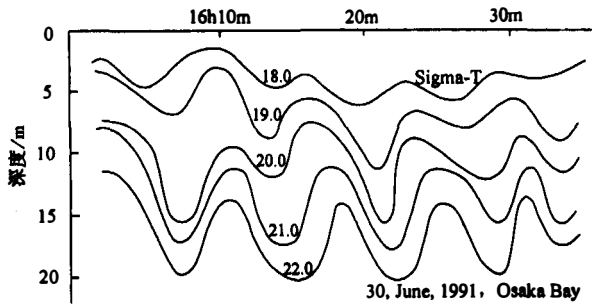


图3 密度观测值的历时变动

Fig. 3 Temporal variation of vertical distribution of water density observed

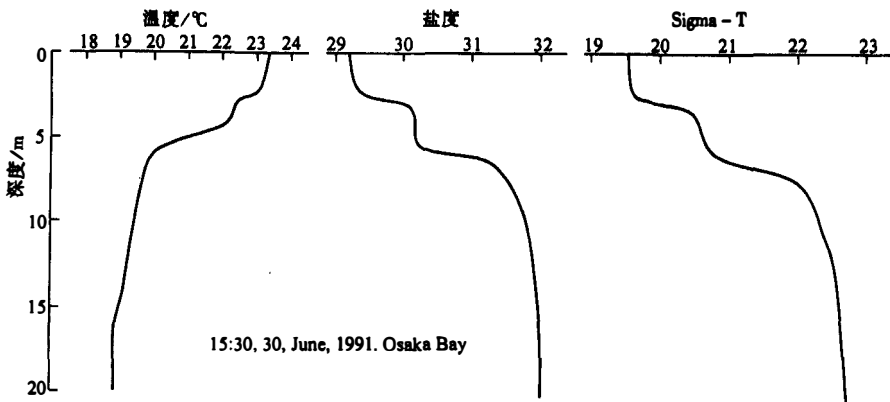


图4 水温、盐分及密度观测值的垂直分布

Fig. 4 Vertical distribution of water temperature, salinity and density observed

注: Sigma-T 在数值上等于 $(\rho - 1) \times 1000$

3 结言

以小振幅波理论为基础,诱导出密度三层成层水域的内波基础式,并以实际观测到的内波为例,与二层成层内波理论进行了比较,结果如下:

(1)三层成层水域的内部波动可以通过小振幅波理论来描述,理论解析结果与实际观测情况吻合良好。

(2)三层成层水域的内波有两种波动方式,大波速方式波动时,其流况及界面变位与二层成层状态时的情形相类似;小波速方式波动时,其流况及界面变位则与二层的情形完全相反。

(3)三层成层水域流速的大小与内部波动引起各层间的流量分配密切相关。

(4)三层成层时内波的最大振幅水深由成层水域的各层厚度及它们之间的密度差比例所决定。

(5)探讨三层成层的内波运动特点与规律,有助于正确认识养殖水域环境,合理设置水产增养殖设施。

参 考 文 献

中村充. 1991. 水产土木工程—生态系海洋环境工程. 东京:工业时事通讯社. 178~183

Yanagi T, Yamamoto T, Ishimaru T, et al. 1993. Short-period internal wave observed near a tidal front in Osaka Bay. Bulletin on Coastal Oceanography, 30(2):201~207

STUDY ON INTERNAL WAVE IN THREE-LAYER STRATIFIED FLUID

ZHANG Shou-Yu, YANG Hong

(College of Engineering & Technology, SFU, 200090)

ABSTRACT Motion of internal wave in three-layer stratified fluid is analyzed by small amplitude wave theory in this paper. Patterns of vertical distribution in velocity due to the wave and its dispersion relationship are discovered, and they fully agree with some characteristics of the internal wave observed at the field of Osaka Bay. Also, the analyzed results show that velocity of flow is related to rate of discharge in each layer due to the wave, and depth of maximum amplitude depends on state of stratification. Moreover, it is found that there are two different modes of velocity in three-layer stratified fluid, interfacial phase and direction of the wave with smaller mode are contrary to case of two-layer stratified fluid. These characteristics of the internal wave in three-layer stratified fluid will be helpful to estimate water environments and to select suitable underwater depth for facilities of aquaculture.

KEYWORDS small amplitude wave theory, internal wave, three-layer stratified fluid