第7卷第3期 上海水产大学学报 Vol. 7, No. 3
1998年9月 JOURNAL OF SHANGHAI FISHERIES UNIVERSITY Sep., 1998

一类二阶常微分方程奇异边值问题的数值方法

周亚虹 李康弟

（上海水产大学人文与基础学院，200090） （上海电力学院基础部，200090）

摘 要 本文讨论如下形式的二阶微分方程 $y''(x)+P(x)y'(x)+Q(x)y(x)=R(x)$，$0<x<1$，$y'(0)=A$，$y(1)=B$，其中 A，B 为常数，系数 $P(x)$，$Q(x)$ 在 $x=0$ 处有奇性。考虑到系数在 $x=0$ 处有奇性，无法用一般差分格式进行计算，故将区间 $(0,1]$ 划分成 $(0,\delta]$ 和 $[\delta,1]$，（δ 靠近奇点）。在 $(0,\delta]$ 区间寻求级数形式的解，继而确定 $y(\delta)$ 值。在 $[\delta,1]$ 区间上用离散不变嵌入法寻求该问题的差分格式，并给出了离散形式下解 y_i 的计数步骤，最后给出数值例子并与真解进行了比较，得到了结点误差 $|y_i-y(x_i)|\leqslant 10^{-4}$。

关键词 奇异边界条件，离散不变嵌入法，迭代方法，结点误差

中图分类号 O175

奇异边值问题与奇异摄动问题一样产生于流体力学，弹性力学，量子力学尤其在机械工程，化学工程等领域经常会出现如下形式的二阶常微分方程：

$$y''(x)+P(x)y'(x)+Q(x)y(x)=R(x),\qquad 0<x<1 \tag{1}$$

边界条件为 $y'(0)=A$，$y(1)=B$， A，B 为常数， (2)

但 $P(x)$，$Q(x)$ 在 $x=0$ 处有奇性（例如 $P(x)=\frac{\alpha}{x}$，$Q(x)=\frac{\beta}{x^2}$），对这类问题解的性质八十年代有许多学者用不同方法从理论上作了研究，象 Chawla 和 Shivkumar[1987]对问题(1)，(2)进行研究，并证明了存在唯一解。但对这类问题的数值方法的探索起步较晚，Jamet[1980]，Russell和 Shampine[1975]用一些富有启发性的方法对一阶奇异边界值问题的数值方法进行了探讨，Kenneth Eriksson 和 Nie[1987]对二阶更一般的常微分方程进行了有限元方法的研究，但没有给出数值方法。本文通过应用离散不变嵌入方法，讨论此类奇异边界值问题，并得到良好的收敛性。

1 奇异边值问题转化为正则问题

对 $y''(x)+P(x)y'(x)+Q(x)y(x)=R(x),\qquad 0<x<1$

$y'(0)=A,\ y(1)=B$

因在 $x=0$，$P(x)$ 不解析（是奇点），可将自变量的变化范围 $0<x<1$ 分为两部分，$0<x<\delta$，$\delta<x<1$，其中 δ 为接近于0的一个数，与 Keller[1980]的相似方法，作如下分析：

(1) 当 $x\in(0,\delta)$ 时，利用广义幂级数的展开形式，令 $y(x)=x^r\sum_{k=0}^{\infty}c_kx^k$， (3)

1998－05－12收到

$c_0\neq 0$,其中 c_k 为系数,r 为本征根,可以通过代入(1)具体地决定上述形式的解,y(x)可以写成如下形式

$$y(x)=\alpha_1 s_1(x)+\alpha_2 s_2(x)+s_3(x) \tag{4}$$

其中 $s_1(x),s_2(x)$,为(1)所对应的齐次方程的线性无关解,$s_3(x)$则是(1)的特解。

(2)下面着重关注如何在[δ,1]中寻找正则问题的解,

考虑在 $x=\delta$ 时的边界条件应满足

$$s_1(\delta)\alpha_1+s_2(\delta)\alpha_2=y(\delta)-s_3(\delta) \tag{5}$$

$$s_1'(\delta)\alpha_1+s_2'(\delta)\alpha_2=y'(\delta)-s_3'(\delta) \tag{6}$$

从(5)可以得到

$$\alpha_1=\frac{[y(\delta)-s_3(\delta)]s_2'(\delta)-[y'(\delta)-s_3'(\delta)]s_2(\delta)}{s_1(\delta)s_2'(\delta)-s_2(\delta)s_1'(\delta)} \tag{7}$$

$$\alpha_2=\frac{[y'(\delta)-s_3'(\delta)]s_1(\delta)-[y(\delta)-s_3(\delta)]s_1'(\delta)}{s_1(\delta)s_2'(\delta)-s_2(\delta)s_1'(\delta)} \tag{8}$$

从条件(2)和(4)

$$\alpha_1 s_1'(0)+\alpha_2 s_2'(0)=y'(0)-s_3'(0) \tag{9}$$

将(7),(8)代入(9)有

$$\frac{f(\delta)s_2'(\delta)-f'(\delta)s_2(\delta)}{g(\delta)}s_1'(0)+\frac{f'(\delta)s_1(\delta)-f(\delta)s_1'(\delta)}{g(\delta)}s_2'(0)=A-s_3'(0) \tag{10}$$

其中,$f(x)=y(x)-s_3(x)$,$g(x)=s_1(x)s_2'(x)-s_2(x)s_1'(x)$

将(10)写成

$$(s_2'(\delta)s_1'(0)-s_1'(\delta)s_2'(0))f(\delta)+(s_1(\delta)s_2'(0)-s_1'(0)s_2(\delta))f'(\delta)=g(\delta)(A-s_3'(0))$$

$$(s_2'(\delta)s_1'(0)-s_1'(\delta)s_2'(0))y(\delta)+(s_1(\delta)s_2'(0)-s_1'(0)s_2(\delta))y'(\delta)=g(\delta)(A-s_3'(0))$$
$$+(s_2'(\delta)s_1'(0)-s_1'(\delta)s_2'(0))s_3(\delta)+(s_1(\delta)s_2'(0)-s_1'(0)s_2(\delta))s_3'(\delta)$$

记 $\alpha=s_2'(\delta)s_1'(0)-s_1'(\delta)s_2'(0)$

$\beta=s_1(\delta)s_2'(0)-s_1'(0)s_2(\delta)$

$$\gamma=g(\delta)[A-s_3'(0)]+\alpha s_3(\delta)+\beta s_3'(\delta) \tag{11}$$

则 $$\alpha y(\delta)+\beta y'(\delta)=\gamma \tag{12}$$

这样,在[δ,1]上,就有 $\begin{cases} y''+P(x)y'+Q(x)y=R(x) \\ \alpha y(\delta)+\beta y'(\delta)=\lambda,\ y(1)=B \end{cases}$

2　离散不变嵌入法

因为 P(x)在[δ,1]上连续,所以存在常数 $P>0$,当 $\delta\leqslant x\leqslant 1$ 使得 $|P(x)|\leqslant P$。将[δ,1]划分成 n 等分,$\delta=x_0<x_1<\cdots<x_n=1$,$x_i-x_{i-1}=h$

h 为步长,对(1)采用中心差分对二阶导数和一阶导数进行离散,其离散化的方程为

$$\frac{y_{i+1}-2y_i+y_{i-1}}{h^2}+P_i\frac{y_{i+1}-y_{i-1}}{2h}+Q_i y_i=R_i \qquad (i=0,1,\cdots,n-1) \tag{13}$$

其中,$P_i=P(x_i)$,$Q_i=Q(x_i)$,$R_i=R(x_i)$

此差分方程可以写成如下形式

$$-A_i y_{i+1}+B_i y_i-C_i y_{i-1}=D_i \tag{14}$$

其中 $A_i=-(1+\frac{h}{2}P_i)$，$B_i=h^2Q_i-2$，$C_i=-(1-\frac{h}{2}P_i)$，$D_i=R_ih^2$ (15)

将(14),(15)作如下处理

令 $V_{i+1}=y_i$ (16)

$$y_{i+1}=\frac{B_i}{A_i}y_i-\frac{C_i}{A_i}y_{i-1}-\frac{D_i}{A_i}=M_iy_i-N_iy_{i-1}-O_i \tag{17}$$

式中 $M_i=\frac{B_i}{A_i}$, $N_i=\frac{C_i}{A_i}$, $O_i=\frac{D_i}{A_i}$ (18)

将方程在区间[δ,1]上的边界条件离散为

$$\alpha y_0+\beta\frac{y_1-y_{-1}}{2h}=\gamma \tag{19}$$

$$y_n=B \tag{20}$$

用与 Keller[1980]相似的方法寻找如下形式迭代解：

$$V_i=w_iy_i+T_i,\qquad i=0,1,2,\cdots,n-1 \tag{21}$$

其中 $w_i=w(x_i)$，$T_i=T(x_i)$

综合应用(16)、(17)

$$\begin{aligned}y_i=V_{i+1}&=w_{i+1}y_{i+1}+T_{i+1}\\&=w_{i+1}(M_iy_i-N_iV_i-O_i)+T_{i+1}\\&=w_{i+1}(M_iy_i-N_i(w_iy_i+T_i)-O_i)+T_{i+1}\\&=(w_{i+1}M_iy_i-w_{i+1}N_iw_iy_i)+(T_{i+1}-w_{i+1}O_i-w_{i+1}N_iT_i)\\&=(w_{i+1}M_i-w_{i+1}N_iw_i)y_i+(T_{i+1}-w_{i+1}O_i-w_{i+1}N_iT_i)\end{aligned}$$

比较等式两端得 $w_{i+1}=\frac{1}{M_i-w_iN_i}$ (22)

$$T_{i+1}=w_{i+1}O_i+w_{i+1}N_iT_i \tag{23}$$

(22),(23)式给出 w_i 和 T_i 递推关系，为了得到 w_i,T_i，初值 w_0,T_0是关键。

为了得到 w_0,T_0，从(19)式，可知

$$y_1=\frac{2h}{\beta}\gamma+y_{-1}-\frac{2h}{\beta}\alpha y_0 \tag{24}$$

又从(14),(15)在 $x=x_0(=\delta)$，得到

$$-A_0y_1+B_0y_0-C_0y_{-1}=D_0 \tag{25}$$

将(24)代入(25)得

$$-A_0(\frac{2h}{\beta}\gamma+y_{-1}-\frac{2h}{\beta}\alpha y_0)+B_0y_0-C_0y_{-1}=D_0,$$

$$-A_0(\frac{2h}{\beta}\gamma+V_0-\frac{2h}{\beta}\alpha y_0)+B_0y_0-C_0V_0=D_0$$

$$V_0=\frac{-A_0\frac{2h}{\beta}\gamma+A_0\frac{2h}{\beta}\alpha y_0+B_0y_0-D_0}{A_0+C_0}=\frac{B_0+A_0\frac{2h}{\beta}\alpha}{A_0+C_0}y_0-\frac{D_0+A_0\frac{2h}{\beta}\gamma}{A_0+C_0}$$

所以 $w_0=\frac{B_0+A_0\frac{2h}{\beta}\alpha}{A_0+C_0}y_0$，$T_0=-\frac{D_0+A_0\frac{2h}{\beta}\gamma}{A_0+C_0}$ (26)

利用 w_0,T_0，可以从(22),(23)推出 $w_i,T_i(i=1,2,\cdots,n-1)$

又 $y_i=v_{i+1}=w_{i+1}y_{i+1}+T_{i+1}$ (27)

下面再利用已有的 w_i,T_i 和边界 $y_n=B$，就可以求解 y_i 的值。

3 计算步骤

从上面第2节的分析，可知求解 y_i 的计算步骤。

从(11)中，按具体情况确定 α,β,γ；从(26)中确定 w_0,T_0的值，由此通过(22)，(23)求出 $w_i,T_i(i=1,2,\cdots,n-1)$；由(27)利用已有的 w_i,T_i 值，可以方便地求 y_i 的值。

4 数值例子与真解的比较

考虑如下数值例子

$$y''-\frac{0.5}{x}y'=-1 \qquad 0<x<1$$

边界条件为 $y'(0)=0$，$y(1)=5$

该常微分方程的解析解 $y(x)=5-x^2+x^{3/2}$

利用第3节的计算步骤可得数值结果如下表：

δ	数值解 x	h=1/20	1/40	1/80	1/160	精确解
0.1	0.1	5.021526	5.021598	5.021617	5.021615	5.021623
	0.2	5.049503	5.049459	5.049447	5.049422	5.049443
	0.3	5.074432	5.074348	5.074323	5.074276	5.074317
	0.4	5.092825	5.092841	5.092873	5.092912	5.092982
	0.5	5.103687	5.103590	5.103554	5.103493	5.103557
	0.6	5.104878	5.104790	5.104755	5.104700	5.104758
	0.7	5.095761	5.095688	5.095657	5.095610	5.095662
	0.8	5.075613	5.075561	5.075536	5.075000	5.075544
	0.9	5.043853	5.043825	5.043811	5.043790	5.043815
	相对误差	0.00013	0.000065	0.000029	0.000174	
0.2	0.2	5.04936	5.049424	5.049436	5.049421	5.049447
	0.3	5.074306	5.074315	5.074311	5.074277	5.074317
	0.4	5.093003	5.092989	5.092976	5.092928	5.092982
	0.5	5.103589	5.103565	5.103544	5.103496	5.103557
	0.6	5.104715	5.104610	5.104685	5.104753	5.104758
	0.7	5.095699	5.095673	5.095650	5.095614	5.095662
	0.8	5.075570	5.075550	5.075530	5.075503	5.075542
	0.9	5.043831	5.043820	5.043808	5.043792	5.043815
	相对误差	0.000053	0.000041	0.000028	0.000058	

5 小结

尽管离散不变嵌入法常用于对正则边值问题的数值求解，但从本文的计算步骤和数值例子的误差分析来看，只要将问题适当的正则化，离散不变嵌入迭代法对一些奇异边值问题的求解仍具有相当好的精度，不失为一种好方法。本文就是在这方面的一个探索。

参 考 文 献

Chawla M M, Shivkumar P N. 1987. On the existance of solution of a class singular two-point boundary value problems. J Comp App Math, 19:379～388.

Jamet P. 1980. On the convergence of finite difference approximations to one dimensional singular boundary value problems. Numer Math, 14:355～378.

Keller H B. 1980. Numerical solution of two point boundary value problems. SIAM A Appl Math, 24:213～240.

Kenneth Eriksson, Yi-Yong Nie. 1987. Math of computation volume 49:167～186.

Russell R D, Shampine F. 1975. Numerical Methods for Singular boundary value problems, SIAM J Numer Anal, 12: 13～35.

A NUMERICAL METHOD FOR A CLASS OF SECOND ORDER DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH SINGULAR BOUNDARY CONDITION

ZHOU Ya-Hong

(*College of the Humanities & Basic Science, SFU*, 200090)

LI Kang-Di

(*Department of Basic Courses, Shanghai Institute of Electric Power*, 200090)

ABSTRACT In this paper, the second order ordinary differential equation $y''(x)+P(x)y'(x)+Q(x)y(x)=R(x)$, with singularity at $x=0$ is discussed, and $0<x<1$, $y'(0)=A$, $y(1)=B$ within the above, A and B are constant, and $P(x)$, $Q(x)$ as coefficient. Ordinary difference scheme can not be used for solving this kind of problem. So the interval $(0,1]$ is divided into two parts $(0,\delta]$ and $[\delta,1]$, and δ is near the singularity. By employing the series expansion on the interval $(0,\delta]$, $y(\delta)$ is obtained, then the discrete invariant imbedding method is described to solve the problem over the reduced interval $[\delta,1]$. Finally a numerical example is given and compared with the precision solution, and the node error $|y_i-y(x_i)|\leqslant 10^{-4}$ is gained.

KEYWORDS singular boundary condition, discrete invariant imbedding method, iterative method, node error