第7卷第1期 上海水产大学学报 Vol. 7, No. 1
1998年3月 JOURNAL OF SHANGHAI FISHERIES UNIVERSITY March, 1998

精度验收的五圆方案

任明荣 徐竹梅
（上海水产大学人文与基础学院，200090） （上海交通大学应用数学系，200030）

摘　要　本文主要讨论关于导弹发射结果的精度验收标准，并由截尾的序贯抽验方法得到一个截尾数为3的五圆方案。其特点是充分利用各次试验中所提供的信息，使最大平均抽验量比已有的双圆方案及三圆方案要小，以减少由于抽验而造成的损失。

关键词　产品精度，截尾序贯抽验
中图分类号　TB11

0　引言

导弹发射结果通常用其落点坐标(x，y)来表示，假设(x，y)服从二维正态分布 $N(0,\sigma^2 I)$，其中$0=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$，$I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$，$\sigma^2$反映了系统误差，被称为产品精度，因此对于导弹精度的验收标准即为

$H_0:\sigma^2=\sigma_0^2 \longleftrightarrow H_1:\sigma^2=\sigma_1^2 \qquad (\sigma_0^2<\sigma_1^2)$

在精度验收方案中目前常用的是双圆方案。具体可描述如下：导弹发射的截尾次数为2，令$u_i=x_i^2+y_i^2$，$i=1,2$，分别表示两次发射结果与靶心距离的平方，给出同圆心的两个圆，其半径平方分别为$k_1\sigma_0^2$，$k_2\sigma_0^2$，对于第一枚导弹发射结果，若$\frac{u_1}{\sigma_0^2}<k_1$，则接受$H_0$，若$\frac{u_1}{\sigma_0^2}>k_2$，则拒绝$H_0$，而当$k_1\leqslant\frac{u_1}{\sigma_0^2}\leqslant k_2$时，则发射第二枚导弹。对于第二枚导弹发射结果，若$\frac{u_2}{\sigma_0^2}<k_1$，则接受$H_0$，若$\frac{u_2}{\sigma_0^2}\geqslant k_1$，则拒绝$H_0$，抽验结束。

由于双圆方案显然没有充分利用第一枚抽验所提供的精度信息，因而陈家鼎和李大轼(1991)提出了仍以截尾数为2的三圆方案。令$u_i=x_i^2+y_i^2$，$i=1,2$，对于第一枚导弹发射结果，若$\frac{u_1}{\sigma_0^2}<k_1$，则接受$H_0$，若$\frac{u_1}{\sigma_0^2}>k_2$，则拒绝$H_0$，而当$k_1\leqslant\frac{u_1}{\sigma_0^2}\leqslant k_2$时，发射第二枚，对于第二枚导弹发射结果，当$\frac{u_1+u_2}{\sigma_0^2}<k_3$时接受$H_0$，当$\frac{u_1+u_2}{\sigma_0^2}\geqslant k_3$时拒绝$H_0$，验收结束。

由计算结果表明，对于同一的双方风险α、β及鉴别比$\frac{\sigma_0^2}{\sigma_1^2}$下，三圆方案的平均抽验量明显要

1997－12－17收到

(1)陈家鼎，李大轼. 1991. 关于战略导弹精度验收方案的一点研究.

比双圆方案小。在本文中,我们将针对截尾数是3,给出精度验收的五圆方案,并找到使得最大平均抽验量最小的最佳方案,而且给出确定方案的方法的过程框图。

五圆方案:设三次发射落点分别为(x_1,y_1),(x_2,y_2),(x_3,y_3),令$u_i=x_i^2+y_i^2$,$i=1,2,3$。五圆方案即提供五个正参数(k_1,k_2,k_3,k_4,k_5),验收为

(1)发射第一枚导弹

$$\begin{cases}\frac{u_1}{\sigma_0^2}<k_1, & \text{接受 } H_0 \quad \text{(通过验收)}\\ \frac{u_1}{\sigma_0^2}>k_2, & \text{拒绝 } H_0 \quad \text{(未通过验收)}\\ K_1\leqslant\frac{u_1}{\sigma_0^2}\leqslant k_2, & \text{则发射第二枚导弹。}\end{cases}$$

(2)当第一枚结果无法判定是否通过时,发射第二枚

$$\begin{cases}\frac{u_1+u_2}{\sigma_0^2}<k_3, & \text{接受 } H_0\\ \frac{u_1+u_2}{\sigma_0^2}>k_4, & \text{拒绝 } H_0\\ k_3\leqslant\frac{u_1+u_2}{\sigma_0^2}\leqslant k_4, & \text{则发射第三枚导弹。}\end{cases}$$

(3)当第一、二枚结果无法判定是否通过时,则发射第三枚

$$\begin{cases}\frac{u_1+u_2+u_3}{\sigma_0^2}<k_5, & \text{接受 } H_0\\ \frac{u_1+u_2+u_3}{\sigma_0^2}\geqslant k_5, & \text{拒绝 } H_0\end{cases}$$

验收结束。

1　五圆方案的分析

原假设$H_0:\sigma^2=\sigma_0^2\longleftrightarrow$备择假设$H_1:\sigma^2=\sigma_1^2$　$(\sigma_0^2<\sigma_1^2)$
第一类风险为α,第二类风险为β,要求给出合理的k_1,k_2,k_3,k_4,k_5。

(1)因$(x,y)\sim N(0,\sigma^2I)$,从而$\frac{x}{\sigma}\sim N(0,1)$,$\frac{y}{\sigma}\sim N(0,1)$,则$\frac{x^2+y^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(2)$,即$\frac{u}{\sigma^2}$服从指数分布,分布函数为$1-e^{\frac{-u}{2}}$。

(2)由引言讨论可知:事件$\{\frac{u_1}{\sigma_0^2}<k_1\}$、$\{\frac{u_1}{\sigma_0^2}>k_2\}$、$\{k_1\leqslant\frac{u_1}{\sigma_0^2}\leqslant k_2,\frac{u_1+u_2}{\sigma_0^2}<k_3\}$、$\{k_1\leqslant\frac{u_1}{\sigma_0^2}\leqslant k_2,\frac{u_1+u_2}{\sigma_0^2}>k_4\}$、$\{k_1\leqslant\frac{u_1}{\sigma_0^2}\leqslant k_2,K_3\leqslant\frac{u_1+u_2}{\sigma_0^2}\leqslant k_4,\frac{u_1+u_2+u_3}{\sigma_0^2}<k_5\}$、$\{k_1\leqslant\frac{u_1}{\sigma_0^2}\leqslant k_2,K_3\leqslant\frac{u_1+u_2}{\sigma_0^2}\leqslant k_4,\frac{u_1+u_2+u_3}{\sigma_0^2}\geqslant k_5\}$为互不相容的完全事件。

$P_{\sigma_0}\{H_0\text{成立}\}$

$$=P_{\sigma_0}\{\frac{u_1}{\sigma_0^2}<k_1\}+P_{\sigma_0}\{k_1\leqslant\frac{u_1}{\sigma_0^2}\leqslant k_2,\frac{u_1+u_2}{\sigma_0^2}<k_3\}+P_{\sigma_0}\{k_1\leqslant\frac{u_1}{\sigma_0^2}\leqslant k_2,K_3\leqslant\frac{u_1+u_2}{\sigma_0^2}\leqslant k_4,\frac{u_1+u_2+u_3}{\sigma_0^2}<k_5\}$$

$$=1-e^{-\frac{k_1}{2}}+\int_{k_1}^{k_2}P_{\sigma_0^2}\{\frac{u_1+u_2}{\sigma_0^2}<K_3\mid\frac{u_1}{\sigma_0^2}=x\}\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}dx+\int_{k_1}^{k_2}P_{\sigma_0^2}\{K_3\leqslant\frac{u_1+u_2}{\sigma_0^2}\leqslant k_4,\frac{u_1+u_2+u_3}{\sigma_0^2}<k_5\mid\frac{u_1}{\sigma_0^2}=x\}\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}dx$$

$$=1-e^{-\frac{k_1}{2}}+\int_{k_1}^{k_2}[1-e^{-\frac{1}{2}(k_3-x)}]\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}dx+\int_{k_1}^{k_2}\int_{k_3-x}^{k_4-x}[1-e^{-\frac{1}{2}(k_5-x-y)}]\frac{1}{2}e^{-\frac{y}{2}}\cdot\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}dydx$$

$$=1-e^{-\frac{k_1}{2}}+(e^{-\frac{k_1}{2}}-e^{-\frac{k_2}{2}}-\frac{1}{2}e^{-\frac{k_3}{2}}(k_2-k_1)+\frac{1}{2}(e^{-\frac{k_3}{2}}-e^{-\frac{k_4}{2}})(k_2-k_1)-\frac{1}{4}e^{-\frac{k_5}{2}}(k_4-k_3)(k_2-k_1)$$

$$=1-e^{-\frac{k_2}{2}}-\frac{1}{2}e^{-\frac{k_4}{2}}(k_2-k_1)-\frac{1}{4}e^{-\frac{k_5}{2}}(k_4-k_3)(k_2-k_1)$$

$=1-\alpha$。即原假设被正确接受的概率。

(3)同理，

$P_{\sigma_1}\{H_0$成立$\}$

$$=1-e^{-\frac{k_2}{2}c}-\frac{1}{2}e^{-\frac{k_4}{2}}(k_2-k_1)c-\frac{1}{4}e^{-\frac{k_5}{2}c}(k_4-k_3)(k_2-k_1)c^2$$

$=\beta$。即犯第二类错误的概率。

其中 $C=\frac{\sigma_0^2}{\sigma_1^2}$鉴别比

(4)显然 k_1、k_2、k_3、k_4、k_5应满足 $k_1<k_2,k_1<k_3,k_3<k_4\leqslant k_5,k_2<k_4$。

由(2)(3)(4)联立，即得 k_1、k_2、k_3、k_4、k_5应满足关系：

$$\begin{cases}e^{-\frac{k_2}{2}}+\frac{1}{2}e^{-\frac{k_4}{2}}(k_2-k_1)+\frac{1}{4}e^{-\frac{k_5}{2}}(k_4-k_3)(k_2-k_1)=\alpha\\ e^{-\frac{k_2}{2}c}+\frac{1}{2}e^{-\frac{k_4}{2}c}(k_2-k_1)c+\frac{1}{4}e^{-\frac{k_5}{2}c}(k_4-k_3)(k_2-k_1)c^2=1-\beta\\ k_1<k_2,k_3<k_4\leqslant k_5,k_1<k_3,k_2<k_4,c=\frac{\sigma_0^2}{\sigma_1^2}\end{cases}\qquad(1)$$

显然，满足关系组(1)的解有很多组，而我们要找出更合理一些的解。

(5)功效函数，即当真实精度为 σ^2时，接受原假设的概率 $P_\sigma\{H_0$成立$\}=1-e^{-\frac{k_2}{2}c^*}-\frac{1}{2}e^{-\frac{k_4}{2}c^*}(k_2-k_1)c^*-\frac{1}{4}e^{-\frac{k_5}{2}c^*}(k_4-k_3)(k_2-k_1)c^{*2}$，其中 $c^*=\frac{\sigma_0^2}{\sigma^2}$

显然，$\sigma^2\to0$时，$c^*\to+\infty$，$P_\sigma\{H_0$成立$\}=1$；

$\sigma^2\to+\infty$时，$c^*=0$，$P_\sigma\{H_0$成立$\}=0$。

(6)平均抽验量 ASN(σ)，简记为 $S(\sigma)$。

$$S(\sigma)=EN=1\cdot[P_\sigma\{\frac{u_1}{\sigma_0^2}<k_1\}+P_\sigma\{\frac{u_1}{\sigma_0^2}>k_2\}+2\cdot[P_\sigma\{k_1\leqslant\frac{u_1}{\sigma_0^2}\leqslant k_2,\frac{u_1+u_2}{\sigma_0^2}<k_3\}+P_\sigma\{k_1\leqslant\frac{u_1}{\sigma_0^2}\leqslant k_2,\frac{u_1+u_2}{\sigma_0^2}>k_4\}]+3\cdot P_\sigma\{k_1\leqslant\frac{u_1}{\sigma_0^2}\leqslant k_2,k_3\leqslant\frac{u_1+u_2}{\sigma_0^2}\leqslant k_4\}$$

$$=1+P_\sigma\{k_1\leqslant\frac{u_1}{\sigma_0^2}\leqslant k_2\}+P_\sigma\{k_1\leqslant\frac{u_1}{\sigma_0^2}\leqslant k_2,k_3\leqslant\frac{u_1+u_2}{\sigma_0^2}\leqslant k_4\}$$

$$=1+e^{-\frac{k_1}{2}c^*}-e^{-\frac{k_2}{2}c^*}+\frac{1}{2}(e^{-\frac{k_3}{2}c^*}-e^{-\frac{k_4}{2}c^*})(k_2-k_1)c^*$$

显然，$S(\sigma)>1$，当 $\sigma\to0$时，$S(\sigma)\to1$；

当 $\sigma\to+\infty$时，$S(\sigma)\to1$；

(7)平均抽验量的峰值——最大平均抽验量。

由$\frac{dS(\sigma)}{d\sigma}=\frac{dS(\sigma)}{dc^*}\cdot\frac{dc^*}{d\sigma}=0$，为方便起见，将 $s(\sigma)$看作 c^* 的函数，记作 $t(c^*)$。

$$\frac{dS(\sigma)}{dc^*}=\frac{dt(c^*)}{dc^*}$$

$$=-\frac{1}{2}(k_1e^{-\frac{k_1}{2}c^*}-k_2e^{-\frac{k_2}{2}c^*})+\frac{1}{2}(e^{-\frac{k_3}{2}c^*}-e^{-\frac{k_4}{2}c^*})(k_2-k_1)-\frac{1}{4}(k_3e^{-\frac{k_3}{2}c^*}-k_4e^{-\frac{k_4}{2}c^*})$$
$$(k_2-k_1)c^*=0$$

由此式解出 C_0^*，则 $t(C_0^*)$为最大平均抽验量。

一个好的验收方案应使平均抽验量尽可能小，通常用最大平均抽验量来衡量，即要使最大平均抽验量尽可能地小。

2 方案的确定

本文中，我们用了最通常的指数分布的序贯检验法。

u 服从指数分布 $F(u,\sigma^2)=1-e^{-\frac{u}{2\sigma^2}}$，用密度函数似然比的方法：

$$\frac{P_1,m}{P_0,m}=(\frac{\sigma_0^2}{\sigma_1^2})^m\cdot e^{(\frac{1}{2\sigma_0^2}-\frac{1}{2\sigma_1^2})\sum_{i=1}^{m}u_i},\qquad m=1,2,\cdots$$

继续抽样区域为$\frac{\beta}{1-\alpha}<\frac{P_1,m}{P_0,m}<\frac{1-\beta}{\alpha}$，m 从1开始直至某一 m_0，若使$\frac{P_1,m}{P_0,m}>\frac{1-\beta}{\alpha}$，则停止抽验，拒绝原假设 H_0，若使$\frac{P_1,m}{P_0,m}<\frac{\beta}{1-\alpha}$，则停止抽验，接受原假设 H_0。

陈希孺和倪国熙[1988]已经证明，密度函数似然比方法是以概率1有限停止的。

作变换 $\ln\frac{P_1,m}{P_0,m}=m\ln\frac{\sigma_0^2}{\sigma_1^2}+(\frac{1}{2\sigma_0^2}-\frac{1}{2\sigma_1^2})\sum_{i=1}^{m}u_i$

令鉴别比$\frac{\sigma_0^2}{\sigma_1^2}=c$，则 $\ln\frac{P_1,m}{P_0,m}=m\ln c+\frac{1}{2}(1-c)\sum_{i=1}^{m}\frac{u_i}{\sigma_0^2}$继续抽样区域为

$$\frac{2}{1-c}\ln\frac{\beta}{1-\alpha}-\frac{2m\ln c}{1-c}<\sum_{i=1}^{m}\frac{u_i}{\sigma_0^2}<\frac{2}{1-c}\ln\frac{1-\beta}{\alpha}-\frac{2m\ln c}{1-c}$$

上下界都为抽验个数 m 的线性函数，其斜率$-\frac{2\ln c}{1-c}$仅由鉴别比决定，但在本文的五圆方案中，试验并不是无休止进行下去，存在截尾问题，此处截尾数为3，因而我们必须对经典的接收、拒绝、继续抽样区域都加以调整，现在我们对边界线的斜率不作调整，仍为$-\frac{2\ln c}{1-c}$，并令其为 h，而对两边界线间的距离作调整，即将此距离当作变量，设 $d=\frac{2}{1-c}\ln\frac{1-\beta}{\alpha}-\frac{2}{1-c}\ln\frac{\beta}{1-\alpha}$，则根据可靠性统计理论[茆诗松和王玲玲 1984]，前述五圆半径有下列关系：

$$\begin{cases} k_2-k_1=k_4-k_3=d>0 \\ k_3-k_1=k_4-k_2=h>0 \\ k_5\geqslant k_4 \quad \text{（否则讨论无意义）} \end{cases} \tag{2}$$

抽验方案由式(1)决定，并使得最大平均抽验量尽可能小。因此，我们的验收方案可用下述非线性约束规划问题来描述。

$$\min_{k_1,k_2,k_3,k_4,k_5,c^*} \quad s(\sigma)=1+e^{-\frac{k_1}{2}c^*}-e^{-\frac{k_2}{2}c^*}+\frac{1}{2}(e^{-\frac{k_3}{2}c^*}-e^{-\frac{k_4}{2}c^*})(k_2-k_1)c^*$$

s. t.

$$\begin{cases} -\frac{1}{2}(k_1e^{-\frac{k_1}{2}c^*}-k_2e^{-\frac{k_2}{2}c^*})+\frac{1}{2}(e^{-\frac{k_3}{2}c^*}-e^{-\frac{k_4}{2}c^*})(k_2-k_1)-\frac{1}{4}(k_3e^{-\frac{k_2}{2}c^*}-k_4e^{-\frac{k_4}{2}c^*})(k_2-k_1)c^* \\ =0 \\ e^{-\frac{k_2}{2}}+\frac{1}{2}e^{-\frac{k_4}{2}}(k_2-k_1)+\frac{1}{4}e^{-\frac{k_5}{2}}(k_4-k_3)(k_2-k_1)=\alpha \\ e^{-\frac{k_2}{2}c}+\frac{1}{2}e^{-\frac{k_4}{2}c}(k_2-k_1)c+\frac{1}{4}e^{-\frac{k_5}{2}c}(k_4-k_3)(k_2-k_1)c^2=1-\beta \\ k_1<k_2,k_3<k_4\leqslant k_5,k_1<k_3,k_2<k_4 \end{cases} \tag{3}$$

其中，$c=\frac{\sigma_0^2}{\sigma_1^2}$

用关系式(2)对(3)进行简化，即

$$k_1=k_2-d, k_3=k_1+h=k_2-d+h, k_4=k_2+h,$$

则(3)中的变量仅由 k_2、d、h、k_5决定，其中 $h=-\frac{2\ln c}{1-c}$，问题变为：

$$\begin{aligned} \min.\ & F(c^*,k_2,k_5,d) \\ & =1+e^{-\frac{1}{2}(k_2-d)c^*}-e^{-\frac{k_2}{2}c^*}+(e^{-\frac{1}{2}(k_2+h-d)c^*}-e^{-\frac{1}{2}(k_2+h)c^*})c^*d \end{aligned}$$

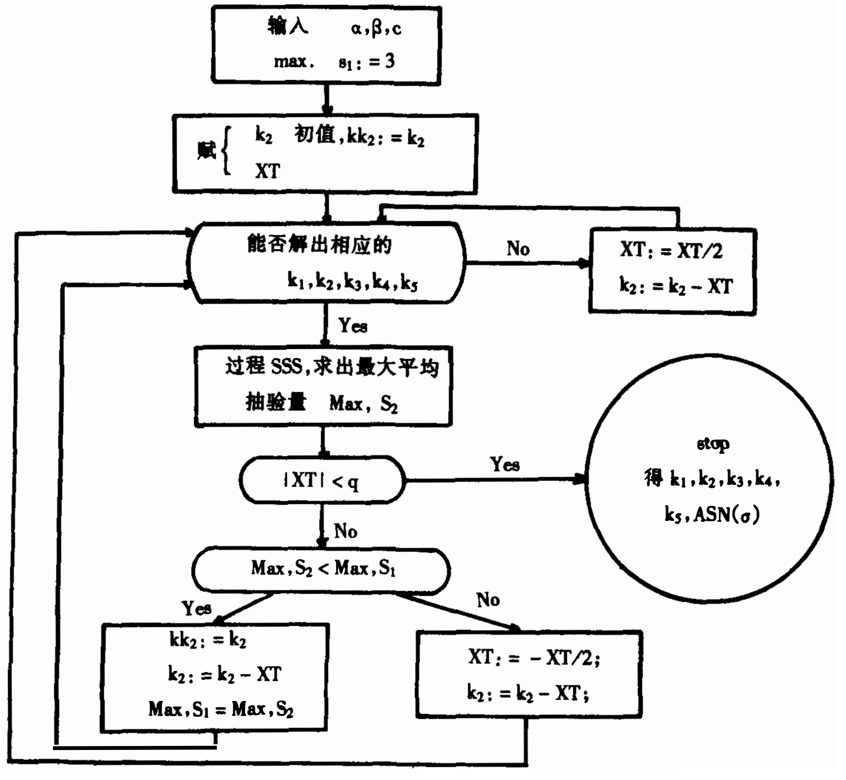
s. t.

$$\begin{cases} -\frac{1}{2}[(k_2-d)e^{-\frac{1}{2}(k_2-d)c^*}-k_2e^{-\frac{k_2}{2}c^*}]+\frac{1}{2}[e^{-\frac{1}{2}(k_2+h-d)c^*}-e^{-\frac{1}{2}(k_2+h)c^*}]d- \\ \quad \frac{1}{4}[(k_2+h-d)e^{-\frac{1}{2}(k_2+h-d)c^*}-(k_2+h)e^{-\frac{1}{2}(k_2+h)c^*}]c^*d=0 \\ e^{-\frac{k_2}{2}}+\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}(k_2+h)}\cdot d+\frac{1}{4}e^{-\frac{k_5}{2}}d^2=\alpha \\ e^{-\frac{k_2}{2}c}+\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}(k_2+h)c}\cdot cd+\frac{1}{4}e^{-\frac{k_5}{2}c}\cdot c^2d^2=1-\beta \\ d>0,k_5\geqslant k_2+h \end{cases} \tag{4}$$

对于(4)式中的前三个等式，给定一个 k_2，则可确定唯一一组 d、k_5、C^*，所以规划问题(4)可以化作关于 k_2的单变量规划问题，我们可用一维搜索法[魏权龄等 1984]得到最大平均抽验量达得最小的 k_2，从而得到相应的五圆方案。

3 求最佳五圆方案过程框图及实例

由上述分析，可得求最佳五圆方案的过程框图如下：



实例，其数据按陈家鼎和李大轼(1991)的取 $\alpha=0.1771$，$\beta=0.2843$，$C=0.25$，则得到最佳五圆方案为：

$k_1=2.1517, k_2=3.7350, k_3=5.8485, k_4=7.4318, k_5=10.4779$；

$ASN(\sigma_0)=1.2098, (\sigma_1)=1.1543, (\sigma_*)=1.2310$

参 考 文 献

陈希孺，倪国熙. 1988. 数理统计学教程. 上海：上海科学技术出版社. 153～161.

茆诗松，王玲玲. 1984. 可靠性统计. 上海：华东师范大学出版社. 245～253.

魏权龄，王日爽，徐　兵等. 1984. 数学规划与优化设计. 北京：国防工业出版社. 231～255.

(2)陈家鼎，李大轼. 1991. 见本文第1页。

FIVE CIRCLES INSPECTION PLAN OF THE PRODUCT ACCURACY

REN Ming-Rong
(*College of the Humanities & Basic Science, SFU*, 200090)
XU Zhu-Mei
(*Department of Applied Mathematics, Shanghai Jiaotong University*, 200030)

ABSTRACT The accuracy inspection criterion of the result of launching the guided missile is discussed in this paper. And a five circles inspection plan with sequential quantity being three is obtained on the basis of the method of sequential sampling inspection. And charactersitic of this plan is to bring the information got from every test into fully plan and to make the maximum average inspection measurements less than the existing double circless and three circles inspection plans so as to reduce the damage resulted from the inspection.
KEYWORDS product accuracy, sequential sampling inspection