研究简报

一类四阶常微分方程奇异摄动问题的有限元方法

A FINITE ELEMENT METHOD FOR A CLASS OF SINGULARLY PETURBED BOUNDARY VALUE PROBLEMS OF FOURTH-ORDER ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS

周亚虹　郑　奕　Zhou Ya-hong and Zheng Yi

（上海水产大学，200090）　(*Shanghai Fisheries University*, 200090)

关键词　离散格林函数，彼得洛夫－伽略金方法

KEYWORDS　discrete Green function, Petrov-Garlerkin method

带小参数的微分方程在工程技术上具有广泛的应用，并日益渗透到医学、经济学及生物科学等诸多领域。如在高层建筑的设计与生物群体模型的研究方面都会产生这一类方程。本文采用 Petrov-Galerkin 有限元法求解一类四阶常微分方程奇异摄动问题，给出了其有限元形式解，并估计了它与真解的误差，使这一类方程的研究更深入了一步。

1　问题的提法及性质

下面是一类在工程上常用的常微分方程的边值问题：

$$\begin{cases} Lu = \varepsilon u^{(4)} - au'' = f(x), & x \in (0,1) \quad (1) \\ u(0) = u(1) = 0, \quad u''(0) = u''(1) = 0 & \quad (2) \end{cases}$$

其中，ε 为正的小参数 $(0 < \varepsilon \ll 1)$，$a > 1$，$f(x)$ 是光滑函数。

性质1，若 $u(x)$ 是(1)、(2) 的解，$u(x) \in C^6[0,1]$，则得到先验估计：

$|u^{(i)}(x)| \leqslant c, (i = 0,1,2), |u^{(4)}(x)| \leqslant c/\varepsilon$，$|u^{(6)}(x)| \leqslant c/\varepsilon^2$。

其中 c 为与 ε 无关的常数，在不同的表达式中可以代表不同的常数。

证明见(孙其仁，1987)。

1996-05-31收到。

(1)孙其仁，1987。一类四价常数方程奇异摄动问题的一致收敛差分解法，98－110。MMM Ⅱ 会议文集。

下面来寻找问题(1)、(2)的变分形式(弱解形式) $u \in H^*(0,1)$ 的解。

定义　$P(u,v) = (-\varepsilon u'' + au', v') = (f,v)$　　(3)

$u(0) = u(1) = 0, u''(0) = u''(1) = 0$

而(3)中的 v 可任取于 $H^*(0,1)$ 中，

$H^*(0,1) = \{v \mid v^{(i)}(x) \in L_2(0,1), i = 0,1,2,3; v(0) = v(1) = 0\}$ $(\cdot,\cdot)$ 表示 $L_2(0,1)$ 空间的内积。

下面我们用 Petrov－Galerkin 有限元法来离散(3)。为此先选取试探函数空间 S^h，它的基为：$\{\Phi_k\}_{K=0}^N$。选取试验函数空间 T^h，它的基为 $\{\Psi_k\}_{K=1}^{N-1}$，用分段常数 $\bar{f}$ 来近似代替 $f(x)$。

从而有有限元形式解：

$$\bar{u}^h(x) = \sum_{i=1}^{N} \bar{u}^h(x_i)\Phi_i(x) \in S^h$$

其中，$\bar{u}^h(x_i)$ 由下式确定：

$\bar{P}(\bar{u}^h, \Phi_k) = (\bar{f}, \Phi_k), (\forall\ \Phi_k \in T^h)$

$\bar{P}(u,v) = (-\varepsilon u''' + au', v')$　　$(u \in S^h, v \in T^h)$

2　离散 Green 函数的定义及性质

首先将[0,1]区间进行 N 等分，则可知步长为 $h = 1/N$.（N 为正整数）。

设网络结点为 $\{x_j\}, \{x_j = jh, j = 0,1,\cdots,N\}$. 对每一个 $j \in \{1,2,\cdots,N-1\}$，与[1]相似地定义离散格林函数(discrete Green function) G_j，满足：

$L^T G_j(x) = \varepsilon G_j^{(4)} - aG_x'' = \delta(x - x_j)$　　（L^T 为 L 的共轭算子）

$G_j(0) = G_j(1) = 0$，　$G_j''(0) = G_j''(1) = 0$

$\delta(\cdot)$是 Dirac 函数。

具体地讲，G_j 满足：

$G_j(x) \in C^2(0,1)$　　(4)

$G_j(0) = G_j(1) = 0$，　$G_j''(0) = G_j''(1) = 0$　　(5)

$G_j^{(4)}(x)$ 在$[0,1]\backslash\{x_1,x_2,\cdots,x_{n-1}\}$ 内存在。

而且

$\varepsilon G_j^{(4)}(x) - aG_j'' = 0$，在$[0,1]\backslash\{x_1,x_2,\cdots.x_{N-1}\}$ 内成立　　(6)

$\lim\limits_{x\to x_i^+} \varepsilon G_j''(x) - \lim\limits_{x\to x_i^-}\varepsilon G_j''(x) = \delta_{ij}$　　$(i = 1,2,\cdots,N-1)$　　(7)

其中：$\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & (i \neq j) \\ 1 & (i = j) \end{cases}$

引理1：　$(1, |G_1'|) \leqslant C$

证明　$\because G_j(x) \in C^2[0,1]$　　$\therefore G_j(x) \in C[0,1]$

$(1, |G_j'(x)|) = \int_0^1 |G_j'(X)| \mathrm{d}x \leqslant C$ 。

与[2]相似地定义试验函数空间 T^h 的基 $\Phi_k (k = 1,2,\cdots,N-1)$ 满足：

$$\begin{cases} L^T\Phi_K = 0, & (x \in (0,1)\backslash\{x_1,x_2\cdots x_{N-1}\}); \\ \Phi_k(x_i) = \delta_{ki}, & (i = 0,1,2,\cdots,N) \\ \Phi_k''(x_i) = 0, & (i \neq k-1,\ k,\ k+1); \\ \Phi_k''(x_i) \neq 0, & (i = k-1, k, k+1)。\end{cases} \quad (8)$$

引理2　　若试验函数空间 T^h 如上(7) 定义，则 $G_j \in T^h$

证明　　为证明 $G_j \in T^h$，只要证明存在一组 $\{\alpha_k\}(k=1,2,\cdots,N-1)$，使得 $G_j=\sum_{k=1}^{N-1}\alpha_k\Phi_k$ 满足离散 Green 函数的所有性质即可，显然(4)，(5)，(6)是容易满足的，下面来验证(7)式。

将 $\sum_{k=1}^{N-1}\alpha_k\Phi_k$ 代入(2,4)得到：

$\alpha_k(\varepsilon\Phi_k^{*}(x_i^{+})-\varepsilon\Phi_k^{*}(x_i^{-}))=\delta_{ik},(i=1,2,\cdots,N-1)$

令矩阵 $M=(m_{ki})=(\varepsilon\Phi_k^{*}(x_i^{+})-\varepsilon\Phi_k^{*}(x_i^{-}))$，由 $L^T\Phi_k^{*}=0$　$\Phi_k^{*}(x_i)=\delta_{ki}$，$\Phi_k^{*}(x_i)=0,(i=k-1,k,k+1)$ 知 Φ_k：只在 (x_{k-1},x_{k+1}) 内为非零，在 $(0,1)\backslash(x_{k-1},x_{k+1})$ 内恒为零。

所以 M 为三对角阵。

进一步可以证明：$|m_{jj}|=|m_{j\,j-1}|+|m_{j\,j+1}|$

$|m_{11}>|m_{12}|$

$|m_{N-1\,N-1}|>|m_{N-1\,N-2}|$

显然 M 是强连续的，也就是 M 是不可约矩阵，从而 M 则非奇异阵。

则有唯一解 $\{\alpha_k\},(k=1,2,\cdots,N-1)$。

3　误差估计分析及本文的结果

引理3　　解析解 $u(x)$ 和有限元解 $\pi^h(x)$ 在结点上存在如下关系：

$u(x_j)-\overline{u}^h(x_j)=(f-\overline{f},G_j)$

证明　　由定义：$u(x_j)-\overline{u}^h(x_j)=(u-\overline{u}^h,\delta(x-x_j))=(u-\overline{u}^h,L^TG_j)$

$$=(L(u-\overline{u}^h),G_j)=\overline{P}(u-\overline{u}^h,G_j)$$

$\because$　$G_j\in T^h$

$\therefore$　上式 $=\overline{P}(u,G_j)-(\overline{f},G_j)=\overline{P}(u,G_j)-P(u,G_j)+(f-\overline{f},G_j)$

$$=(-\varepsilon u'''+au',G'_j)-(-\varepsilon u'''+au',G'_j)+(f-\overline{f},G_j)=(f-\overline{f},G_j)$$

由引理3可知，由于试验函数空间的基与试探函数空间的基取法相同，微分方程的真解 $u(x)$ 与有限元近似解 $\overline{u}^h(x)$ 在网格结点上的误差能用 f 与其近似值 $\overline{f}$ 及 Green 函数 G_j 的内积表示，这样就大大减少了误差估计的工作量。

适当地取 $\overline{f}(x)=\frac{1}{2}[f(x_i)+f(x_{i+1})],x\in[x_i,x_{i+1}]$

引理4　　$|(f-\overline{f},G_j)|\leqslant ch^2(1,|G_j'|)$

证明　　对 $0\leqslant x\leqslant 1$，设 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t,\overline{F}(x)=\int_0^x\overline{f}(t)\mathrm{d}t$

由于 $x\in[0,1]$，故总有 $x\in[x_i,x_{i+1}]$。

$|F(x)-\overline{F}(x)|=|F(x_i)-\overline{F}(x_i)-\int_{x_i}^x(\overline{f}(t)-f(t)\mathrm{d}t|\leqslant ch^2x_i+ch^2\leqslant ch^2$　（c 可为不同常数）

而 $|(f-\overline{f},G_j)|=|CF(1)-\overline{F}(1)G_j(1)-\int_0^1(F(t)-\overline{F}(t))G'_j(t)\mathrm{d}t|\leqslant ch^2\int_0^1|G'_j(t)|\mathrm{d}t\leqslant ch^2$（由引理1）

这样便得到了本文的结果：

定理　　在子空间 $[x_i,x_{i+1}]$ 上定义：$\overline{f}=\frac{1}{2}[f(x_i)+f(x_{i+1})]$，试验函数中基的取法符合(8)，则有：

$\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}|u(x_i)-\overline{u}^h(x_i)|\leqslant ch^2$。